ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК, Д. В. КОЛЕДА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРИМИНАНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен степени n, пусть $H(P) = \max_{0\le i\le n} |a_i|$ обозначает высоту многочлена P, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни P. Число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{1}$$

называется дискриминантом многочлена P. Для многочленов первой степени нет содержательного толкования понятия дискриминанта, поэтому в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Дискриминант многочлена является одной из основных характеристик многочлена и играет важную роль в алгебре и теории чисел [1, 2]. В задачах метрической теории диофантовых приближений верхние оценки для количества многочленов ограниченной высоты привели к решению проблемы Малера для многочленов третьей степени [3, 4], а также к точным верхним оценкам размерности Хаусдорфа [5].

Дискриминант является целочисленным многочленом от $n+1$ переменных коэффициентов многочлена P (см. [1]). Это следует из представления дискриминанта в виде определителя.

Ясно, что $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни. Если $D(P) \ne 0$, то из представления $D(P)$ в виде определителя легко получается неравенство

$$1 \le |D(P)| \le \gamma_n H(P)^{2n-2}, \tag{2}$$

где постоянная γ_n зависит только от степени n и определена как

$$\gamma_n := \sup_{\substack{P\in\mathbb{Z}[x] \\ \deg P = n}} \frac{|D(P)|}{(H(P))^{2n-2}}.$$

Будем обозначать $\#M$ число элементов конечного множества M, а через μB обозначим меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ обозначаем величины, зависящие только от n и не зависящие от H. Также будем использовать символ Виноградова $\ll$. Выражение $f \ll g$ равносильно тому, что $f \le c_1 g$ для некоторой постоянной c_1, которая зависит только от степени n. Выражение $f \asymp g$ означает, что $g \ll f \ll g$.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и $v \ge 0$. Определим множества

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \le Q\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : 0 < |D(P)| \le \gamma_n Q^{2n-2-2v}\}, \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_{\le n}(Q, v) = \bigcup_{k=2}^{n} \mathcal{P}_k(Q, v). \tag{5}$$

В данной работе мы получим нижние оценки числа элементов во множествах $\mathcal{P}_3(Q, v)$ и $\mathcal{P}_{\le 3}(Q, v)$.

Т е о р е м а 1. *При* $0 \le v \le 2$ *выполняется неравенство*

$$\#\mathcal{P}_3(Q,v) \gg Q^{4-5v/3}.$$

В работе [6] получена оценка

$$c_3 Q^{4-5v/3} < \#\mathcal{P}_3(Q,v) < c_4 Q^{4-5v/3},$$

однако только при $v \le 3/5$. Важное значение при доказательстве теоремы 1 имеет следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть заданы целые числа* $n \ge 2$ *и* $0 \le m \le n-1$. *Тогда существуют положительные постоянные* $\delta_0 = \delta_0(n)$ *и* $c_0 = c_0(n)$ *со следующими свойствами. Для любого промежутка* $I \subset [-1/2, 1/2]$ *найдется достаточно малое* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любых положительных параметров* $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\xi_i < c_5, \quad 0 \le i \le m-1; \qquad \xi_j > c_5, \quad m \le j \le n;$$
$$\xi_0 < \varepsilon, \quad \xi_n > \varepsilon^{-1}, \qquad \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_n = 1,$$

найдется измеримое множество S_I *с мерой*

$$\mu S_I > \frac{3}{4} \mu I, \tag{6}$$

такое, что для любого $x \in S_I$ *существует неприводимый многочлен* $P(x)$, $\deg P = n$, *с условиями*

$$\delta_0 \xi_j < \left| P^{(j)}(x) \right| < c_0 \xi_j, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7}$$

Лемма 1 доказана в работе [7]. Величину 3/4 в (6) можно заменить на любое число γ, $0 < \gamma < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Возьмем точку $x_1 \in S_I$ и воспользуемся леммой 1 при специальном выборе величины ξ_j. Тогда система неравенств (7) примет вид при $P(x) = P_1(x)$:

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < \left|P_1(x_1)\right| < c_0 Q^{-v_0}, \quad \delta_0 Q^{-v_1} < \left|P_1{}'(x_1)\right| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q^{-v_2} < \left|P_1{}''(x_1)\right| < c_0 Q^{-v_2}, \qquad \delta_0 Q < \left|P_1^{(3)}(x_1)\right| < c_0 Q, \\ v_0 + v_1 + v_2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Потребуем выполнения неравенства

$$v_0 - v_1 \ge v_1 - v_2 \ge v_2 + 1.$$

Упорядочим корни многочлена $P_1(x)$ относительно точки x_1:

$$\left|x_1 - \alpha_1\right| \le \left|x_1 - \alpha_2\right| \le \ldots \le \left|x_1 - \alpha_n\right|.$$

Необходимую для $\left|x_1 - \alpha_1\right|$ оценку сверху дает

Л е м м а 2 [8]. *Если* α_1 *– ближайший к числу* x_1 *корень многочлена* $P(x)$, $\deg P = n$, *то справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} \left|x_1 - \alpha_1\right| \le n \left|P(x_1)\right| \left|P'(x_1)\right|^{-1}, \\ \left|x_1 - \alpha_1\right| \le 2^n \left|P(x_1)\right| \left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Если обозначить через β_1, β_2 корни $P_1'(x)$, а через γ – корень $P_1''(x)$, то, применив лемму 2 к неравенствам (8), получим

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 Q^{-v_0 + v_1}, \quad |x_1 - \beta_1| < c_6 Q^{-v_1 + v_2}, \quad |x_1 - \gamma| < c_6 Q^{-v_2 - 1}. \tag{10}$$

В работе [7] показано, что из (8) и (10) можно получить

$$|\alpha_1-\alpha_2|<c_7Q^{-v_1+v_2},\qquad |\alpha_1-\alpha_3|<c_7Q^{-v_2-1}. \tag{11}$$

Возьмем в (11) величины $v_0=3-v$, $v_1=2v/3-1$, $v_2=v/3-1$. Тогда (11) примет вид

$$|\alpha_1-\alpha_2|<c_8Q^{-v/3},\quad |\alpha_1-\alpha_3|<c_8Q^{-v/3},\quad |\alpha_2-\alpha_3|<c_8Q^{-v/3}. \tag{12}$$

Из неравенств (12) следует $1\le|D(P)|<c_9Q^{4-2v}$.

При выполнении неравенств (10) и (12) имеем

$$|x_1-\alpha_1|<c_6Q^{-4+5v/3}. \tag{13}$$

Для многочлена $P_1(x)$ неравенство (13) может выполняться только в окрестностях корней α_1, α_2 и α_3 с общей длиной, не большей $6c_6Q^{-4+5v/3}$. Если $P_1(x),P_2(x),\ldots,P_t(x)$ – многочлены, имеющие точки $x\in S_I$, для которых выполняется неравенство (13), то должно выполняться неравенство

$$6c_6tQ^{-4+5v/3}\ge\mu S_I>\frac{3}{4}\mu I,$$

откуда

$$t>\frac{1}{8}c_6^{-1}Q^{4-5v/3}\mu I. \tag{14}$$

Таким образом, в кубическом случае зависимость между показателями степени порядков $x=4-2v$ и $y=4-5v/3$ имеет вид $y=\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}$. Мы получим зависимость между x и y вида

$$y=F_3(x)=\begin{cases}4, & x>4,\\ \frac{5}{6}x+\frac{2}{3}, & 0\le x\le 4.\end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $F_n(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$\#\left\{P\in\mathcal{P}_n(Q):0<|D(P)|\le\gamma_nQ^x\right\}\ge c_{10}Q^{F_n(x)}$$

для некоторой постоянной c_{10} при достаточно больших Q, будем называть *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени n*. А функцию $F_{\le n}(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\#\left\{P\in\mathcal{P}_k(Q):2\le k\le n,\ 0<|D(P)|\le\gamma_nQ^x\right\}\ge c_{11}Q^{F_{\le n}(x)}$$

для некоторой постоянной c_{11} при достаточно больших Q, назовем *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени не больше n*.

Решим задачу о зависимости между величиной дискриминанта многочлена второй степени и количеством элементов множества $\mathcal{P}_2(Q,v)$. Вновь воспользуемся леммой 1. В точке $x_1\in S_I$ построим неприводимый многочлен второй степени $P_1(x)$, как в (8):

$$\begin{cases}\delta_0Q^{-v_0}<|P_1(x_1)|<c_0Q^{-v_0}, & \delta_0Q^{-v_1}<|P_1'(x_1)|<c_0Q^{-v_1},\\ \delta_0Q<|P_1''(x_1)|<c_0Q, & v_0+v_1=1.\end{cases} \tag{15}$$

Выберем $v_0=2-v$, $v_1=v-1$. Тогда в окрестности

$$|x_1-\alpha_1|<c_{10}Q^{-3+2v} \tag{16}$$

имеем многочлен, дискриминант которого удовлетворяет неравенству

$$1 \le |D(P)| < c_{11} Q^{2-2v}. \tag{17}$$

Т е о р е м а 2. *При* $0 \le v \le 1$ *справедливо неравенство*

$$c_{12} Q^{3-2v} < \# \mathcal{P}_2(Q, v). \tag{18}$$

В силу (18) в квадратичном случае зависимость между показателями степени $y = 3 - 2v$ и $x = 2 - 2v$ имеет вид

$$y = F_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 2, \\ x+1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Объединяя теоремы 1 и 2, получим теорему 3.

Т е о р е м а 3. *Функция* $F_{\le 3}(x)$ *имеет вид*

$$F_{\le 3}(x) = \begin{cases} 4, & x > 4, \\ \dfrac{5}{6}x + \dfrac{2}{3}, & 14/5 \le x \le 4, \\ 3, & 2 \le x < 14/5, \\ x+1, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Литература

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М., 1976.
2. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. *Davenport H.* // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 58–62.
4. *Volkmann B.* // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 55–57.
5. *Bernik V., Dodson M.* Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 137. Cambridge, 1999.
6. *Коледа Д. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 3. 10–16.
7. *Beresnevich V., Bernik V., Götze F.* // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, N 5. P. 1165–1179.
8. *Берник В. И.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.

V. I. BERNIK, D. U. KALIADA

DISTRIBUTION OF THE DISCRIMINANT VALUES FOR POLYNOMIALS OF SECOND AND THIRD DEGREE

Summary

In the article a relation between the number of square and cubic integer polynomials of bounded degree and discriminant values for these polynomials is established.